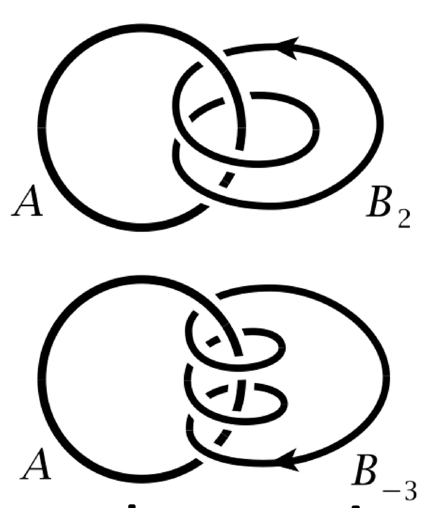
Grupa Podstawowa

Marcin Wierzbiński

Uniwersytet Warszawski | Wydział Matematyki, Mechaniki i Informatyki

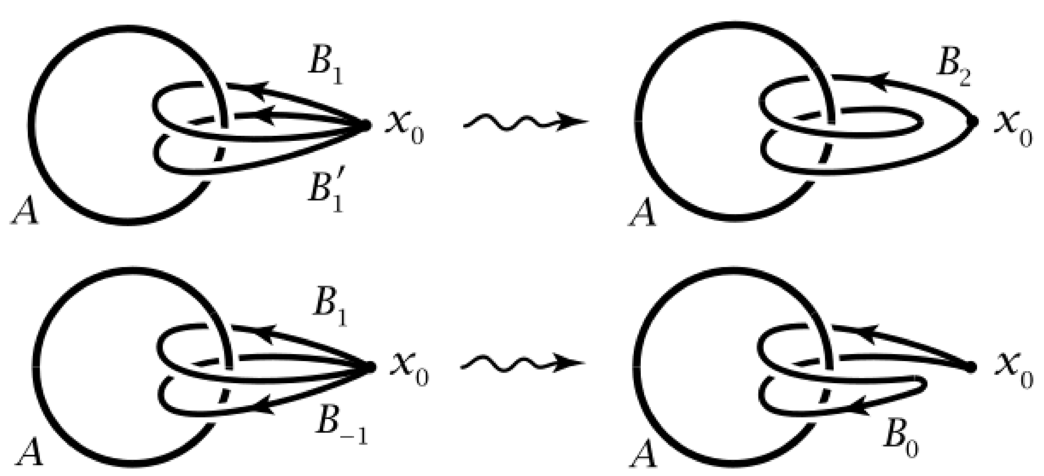
WPROWADZENIE



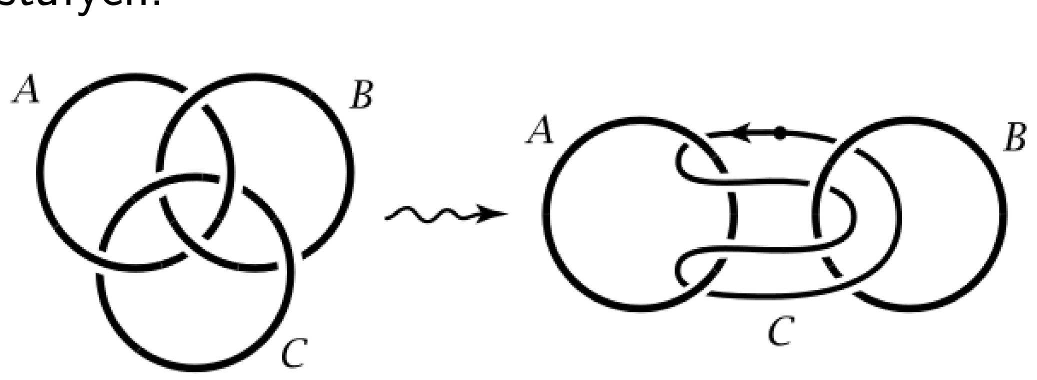
Rozważmy dwa połączone okręgi A i B_2 (jak na obrazku). Nasza intuicja podpowiada nam, że skoro dwa okręgi są ze sobą połączone, jest to niemożliwe, aby oddzielić B od A dowolnym ciągłym ruchem. Intuicja ta znajduje odzwierciedlenie w matematycznym pojęciu **grupy podstawowej**. Ustalmy więc orientację pętli B_2 i B_{-3}. **Stopień** oznacza, ile razy, zachowując orientację, pętla owinie się wokół okręgu A. Zatem np. B_0 jest pętla niepołączoną z A.

Czy możemy wprowadzić operację dodawania pętli? Zorientowana pętla może być interpretowana jako droga przemierzona w czasie, począwszy z dowolnego punktu x_0 na pętli. Dwie różne pętle B i B' zaczynające się i kończące w tym samym punkcie x_0 mogą zostać „dodane" tworząc nową pętlę, która przebiega po B, a potem po B'.

W ogólności $B_m + B_n$ tworzy pętlę B_{m+n}.

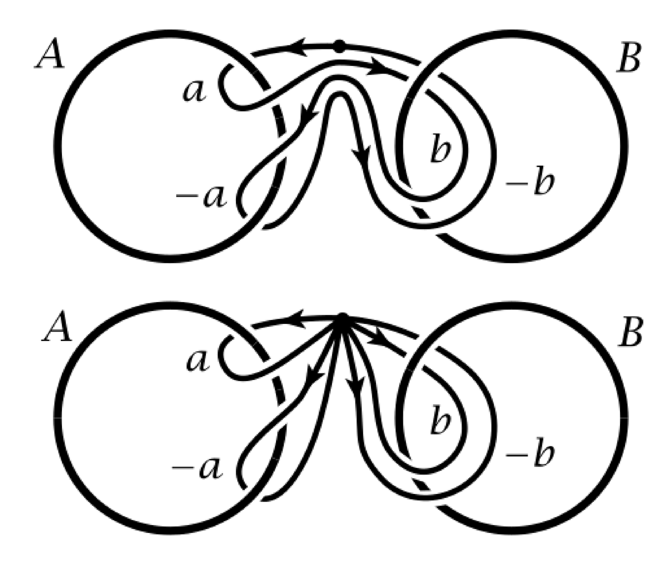


Rozważmy jeszcze jeden przykład, znany jako *pierścienie Boromeuszy*. Pierścienie są połączone w taki sposób, że usunięcie dowolnego spowoduje rozpad pozostałych.



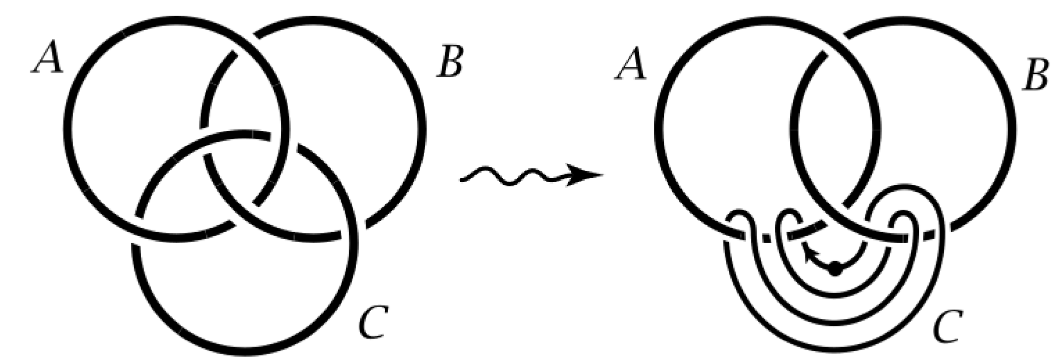
Możemy przekształcić ciągle pętle C jak na rysunku powyżej. Czy pętla C może być w sposób ciągły dalej odkształcana, aby całkowicie ją odłączyć od A i B?

WPROWADZENIE



W nowym ustawieniu ustalając punkt startu oraz kierunek, możemy wyróżnić 4 pętelki: (a) pod A, (b) pod B, $(-a)$ nad A, $(-b)$ nad B. Gdy rozpatrzymy sekwencje uporządkowaną i oznaczymy jak na obrazku, możemy zdeformować ją do sumy $a + b + (-a) + (-b)$. Tak przedstawione działanie nie tworzy pętli **zerowej** B_0, wobec czego „dodawanie" pętli nie jest **przemienne**. Piszemy $-a$, aby zaznaczyć orientacje pętli. W tym wyrażeniu występuje a i $-a$ to uzasadnia, że ta pętla nie jest bezpośrednio połączona z A. Jeśli zmierzymy zapętlenie dwoma liczbami, wtedy „nad" i „pod" usuną się do zera. Odzwierciedla to fakt, że C nie jest bezpośrednio połączone z A lub B.

W następnym przykładzie modyfikujemy pętle A i B, tak aby były teraz połączone. Pętle C deformujemy jak na obrazku poniżej.



Powtarzając procedurę jak wyżej, tworzymy reprezentacje C: $a + b - a - b$. Tutaj działanie „dodawania" jest przemienne, bo C jest pętlą rozłączną z A i B.

HOMOTOPIA PĘTLI

$(X, \mathcal{T})$ - przestrzeń topologiczna z wyróżnionym punktem x_0.

Pętlą w X zaczepioną w x_0 nazywamy dowolne ciągłe przekształcenie $f : [0,1] \mapsto X$ takie, że $f(0) = x_0 = f(1)$.

Homotopia pętli jest rodziną ciągłych przekształceń, które jedną pętle deformują w drugą $f_t : [0,1] \mapsto X$, $t \in [0,1]$, takich, że $f_t(0) = x_0 = f_t(1)$.

PODSTAWOWA KONSTRUKCJA

$(X, \mathcal{T}_x)$, $(T, \mathcal{T}_y)$, - przestrzenie topologiczne.

Zbiór pętli w X zaczepionych w x_0 oznaczmy jako $\Omega(X, x_0)$. W tym zbiorze wprowadzimy operacje mnożenia i odwracania pętli.

Iloczynem pętli $f, g \in \Omega(X, x_0)$ nazywamy pętlę:

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

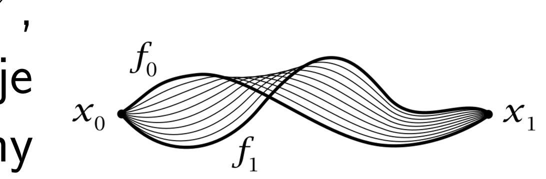
Pętla odwrotna do f jest określona formułą $\bar{f}(t) = f(1-t)$, gdzie $t \in [0,1]$

Pętla stała ozn. $\epsilon_{x_0}(t) = x_0$

Nasz iloczyn $f \cdot g$ definiuje działanie wewnętrzne, pokazuje się że:

- działanie to nie zależy od wyboru reprezentantów
- spełnione jest prawo łączności
- $\bar{f}(t)$ jest elementem odwrotnym do $f(t)$
- ϵ_{x_0} jest elementem neutralnym działania

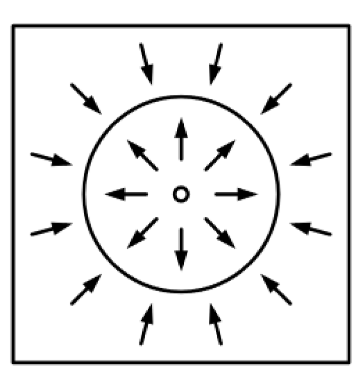
Działanie grupowe składania pętli tworzy **grupę podstawowa** przestrzeni. Oznaczenie: $\pi_1(X, x_0)$

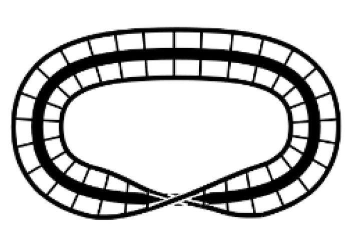


Niech $f_0, f_1 : X \mapsto Y$, ciągłe funkcje, nazwiemy je **homotopijne**, jeśli możemy w „sposób ciągły przekształcić jedną w drugą". Piszemy wówczas $f_0 \sim f_1$.

Przestrzenie $(X, \mathcal{T}_x)$, $(T, \mathcal{T}_y)$, są **homotopijnie równoważne**, jeśli istnieją ciągłe przekształcenia, $f : X \mapsto Y$, $g : Y \mapsto X$ takie, że $f \circ g \sim id_Y$, oraz $g \circ f \sim id_X$.

Przykłady: Okrąg jest homotopijnie równoważny z płaszczyzną bez punktu $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wstęga Mobiusa jest homotopijnie równoważna z okręgiem.





Grupa podstawowa jest **niezmiennikiem homotopii**, czyli jeśli X i Y są homotopijnie równoważne, to ich grupy podstawowe są izomorficzne.

GRUPA PODSTAWOWA OKRĘGU

Twierdzenie: Grupa podstawowa $\pi_1(S^1, x_0)$ jest izomorficzna z grupa addytywną liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Co więcej pętlę w S^1 są homotopijne, jeśli mają równe stopnie.

Wniosek: Okrąg S^1 nie jest homotopijnie równoważny z przestrzenią jednopunktową.

ZASTOSOWANIE $\pi_1(S^1, x_0)$

- (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym dla dysku). Dla każdego przekształcenia ciągłego $h : D^2 \mapsto D^2$ istnieje $x \in D^2$ taki, że $h(x) = x$.
- (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + z^n$ o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.

PRZYKŁADY

- Grupa podstawowa sfery $\pi_1(S^2) \cong 0$
- Grupa podstawowa torusa $\pi_1(T^2 = S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- Grupa podstawowa płaszczyzny rzutowej $\pi_1((\mathbb{R}P^2)) \cong \mathbb{Z}_2$

REFERENCJE

[1] Allen Hatcher.
Algebraic Topology.
Allen Hatcher, 1th edition, 2001.

[2] Elżbieta Pol i Roman Pol Stanisław Betley, Józef Chaber.
TOPOLOGIA I.
1th edition, 2013.

KONTAKT

- Email: m.wierzbinski@student.uw.edu.pl